

DETERMINANTLAR

2. Hafta

Bir A kare matrisinin determinanı $\det(A)$ veya $|A|$ ile gösterilir.

Özellikler

1) 1×1 mertebesinden $A = [a]$ kare matrisinin determinanı

$$\det(A) = |A| = |a| = a \text{ dir.}$$

2) 2×2 mertebesinden $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ kare matrisinin

$$\text{determinanı } |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ dir.}$$

3) 3×3 mertebesinden $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ kare matrisinin

determinanı

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Bu ifade A matrisinin determinantının birinci satırı göre açılımıdır.

Tanım. $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ mertebesinden bir matris olsun ve

M_{ij} , a_{ij} elemanının bulunduğu satır ve sütunun silinmesiyle

A dan elde edilen $(n-1) \times (n-1)$ mertebeden matrisi gösterir.

M_{ij} matrisinin determinantına a_{ij} elemanının minörü denir,

$$\text{Ayrıca } A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

değerine a_{ij} elemanının eşçarpanı (kofaktörü) denir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ olsun.

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(8-25) = 17$$

Teorem. $n \geq 2$ olmak üzere A , $n \times n$ mertebeden bir kare matris olsun. $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{aligned} \det A = |A| &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in} \\ &= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} \end{aligned}$$

Determinantın bu şekilde hesaplanmasına Laplace açılımı denir.

NOT: Determinantın bu şekilde hesaplanmasında açılım için kullanacağımız satır veya sütunlarda açılımı en çok bulunduran satır veya sütun tercih edilir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $|A| = \det(A) = ?$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot (2 - (-3)) + 2 \cdot (-1) (-2 - 9)$$

$$= 5 - 2(-11) = 5 + 22 = 27$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $|A| = ?$

$$|A| = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} + a_{41} A_{41}$$

$$= 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 6 \cdot A_{41}$$

$$= 6 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 2 \cdot A_{31} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -6 \cdot 2 \cdot (-12)$$

$$= 144$$

Determinantın Özellikleri

1) Bir determinanтта herhangi bir satır (ya da sütun) elemanlarının hepsi sıfır ise determinantın değeri 0 dir.

Örnek: $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2) Bir determinantın bir satırındaki (ya da sütunundaki) elemanlar bir k skaleri ile çarpılırsa determinant k ile çarpılmış olur.

Örnek: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3(-2) & 0 \\ 2 & 3 \cdot 0 & -5 \\ 0 & 3 \cdot 1 & -1 \end{vmatrix}$
 $= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

3) Determinanтта herhangi iki satır (ya da sütun) yer değiştirirse determinant işaret değişir.

Örnek: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

4) Bir determinanın herhangi bir satır (ya da sütun) elemanları bir k skaleri ile çarpılıp bir başka satırın (ya da sütunun) elemanlarına eklenirse determinanın değeri değişmez.

Örnek: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = a_{11} A_{11}$


 $H_{31}(-3)$
 $H_{31}(1)$

$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$

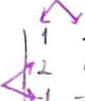
5) Bir determinanın herhangi iki satırı (ya da sütunu) birbirine eşitse determinanın değeri 0 olur.

Örnek: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$



6) Bir determinanın herhangi iki satır (ya da sütun) elemanları karşılıklı olarak orantılı ise determinanın değeri 0'dır.

Örnek: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$



7) Bir matrisin determinanı transpozasının determinana eşittir:

$$|A| = |A^t|$$

$$8) |AB| = |A||B|$$

$$9) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$10) |A^k| = |A|^k, \quad k \in \mathbb{Z}^+$$

$$11) (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

12) A , $n \times n$ matris ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$|kA| = k^n |A|$$

Örnek: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = t \Rightarrow \begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k^2 |A| = k^2 t$

Bir matrisin Tersİ

Tanım. Bir kare matrisin elemanlarının yerine, o elemanların eş çarpınlarının alıncasıyla elde edilen matrisin transpozasına ilk matrisin ek matrisi (adjoint matrisi) denir. Bir A matrisin ek matrisi

$\text{Ek}A$, $\text{Adj}A$ veya A^* ile gösterilir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisinin ek matrisi

$$EkA = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$EkA = ?$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow EkA = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorem. A bir kare matris olsun. $|A| \neq 0$ ise

$$A^{-1} = \frac{E_k A}{|A|}$$

NOT: Bir A kare matrisi için $|A|=0$ ise A^{-1} yoktur.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $A^{-1} = ?$

$$E_k A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 2 \\ -5 & 9 & -6 \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-4) - 1 \cdot 5 + 0$$

$$= -17$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{17} \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 9 & -7 \\ 2 & -6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/17 & 5/17 & -2/17 \\ 3/17 & -9/17 & 7/17 \\ -2/17 & 6/17 & 1/17 \end{bmatrix}$$

ÖRNEKLER

$$1) \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = -18$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & x & y+z \\ 1 & y & z+x \\ 1 & z & x+y \end{vmatrix} = ?$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x+y+z \\ 1 & y & x+y+z \\ 1 & z & x+y+z \end{vmatrix} = (x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4) |A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b^2+a^2+ab \\ 1 & c^2+a^2+ac \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a) (c^2+a^2+ac - b^2-a^2-ab)$$

$$= (b-a)(c-a) (c^2+ac-b^2-ab)$$

$$5) |A| = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2 & y & 1 \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ y^2-x^2 & y-x & 0 \\ z^2-x^2 & z-x & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} y^2-x^2 & y-x \\ z^2-x^2 & z-x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} y-x & 1 \\ z-x & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x) (y-x-z+x)$$

$$= (y-x)(z-x)(y-z)$$

$$6) \begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & bc \\ b & b^3 & ca \\ c & c^3 & ab \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & abc \\ b^2 & b^4 & abc \\ c^2 & c^4 & abc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2 & b^4 & 1 \\ c^2 & c^4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^4 & 1 \\ b^2 - a^2 & b^4 - a^4 & 0 \\ c^2 - a^2 & c^4 - a^4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} b^2 - a^2 & b^4 - a^4 \\ c^2 - a^2 & c^4 - a^4 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2 - a^2)(c^2 - a^2) \begin{vmatrix} 1 & b^2 + a^2 \\ 1 & c^2 + a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b^2 - a^2)(c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2 - a^2)$$

$$= (b^2 - a^2)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)$$

NOT

$|A| \neq 0$
 A , $n \times n$ tekil olmayan bir kare matris ve

$$|EkA| = |A|^{n-1}$$

Örnek: A ve B , 3×3 mertebeden iki matris ve $\det A = -7$ ve $\det B = 4$ olsun.

i) $\det(A^t(5B)^{-1}) = ?$ ii) $\det(2A^{-1} + EkA) = ?$

$$\begin{aligned} \text{i) } \det(A^t(5B)^{-1}) &= \det(A^t) \det(5B)^{-1} \\ &= \det A \cdot \det\left(\frac{1}{5} B^{-1}\right) \\ &= \det A \left(\frac{1}{5}\right)^3 \frac{1}{\det B} \\ &= -\frac{7}{125} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{7}{500} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \det(2A^{-1} + EkA) &= \det(2A^{-1} - 7A^{-1}) \\ &= \det(-5A^{-1}) \\ &= (-5)^3 \det A^{-1} \\ &= -125 \cdot \frac{1}{\det A} \\ &= \frac{+125}{7} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{EkA}{|A|}$$

$$EkA = A^{-1} \frac{|A|}{-7}$$

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersinin olmaması için $x=?$

$$|A| = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 5 & x-3 & 1 \\ 6 & -6 & x+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+3 & -1 & 1 \\ 2-x & x-2 & 0 \\ -(x-1)(x+6) & x-2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2-x & x-2 \\ -(x-1)(x+6) & x-2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= x-2 \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ -x^2-7x-6 & 1 \end{vmatrix} = (x-2)(2-x+x^2+7x+6) \\ &= (x-2)(x^2+6x+8) \\ &= (x-2)(x+2)(x+4) \end{aligned}$$

$$|A|=0 \Rightarrow x-2=0 \text{ veya } x+2=0 \text{ veya } x+4=0$$

$$\Rightarrow x=2, -2 \text{ veya } -4 \text{ olmalıdır.}$$

$$9) \begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & b-c \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(a+b) & 2(a+b) & a+b \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2b & 2a & a+c \\ a+b & a+b & b \end{vmatrix} = (a+b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2b-2a-2c & -2c & a+c \\ a-b & a-b & b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2b-2a-2c & -2c \\ a-b & a-b \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)(a-b) \begin{vmatrix} b-a-c & -c \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(a+b)(a-b)(b-a)$$

$$= -2(a+b)(a-b)^2$$

$$10) \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = ?$$

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ x & x & d & e \\ x & x & x & f \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a & b & c \\ 0 & x & d & e \\ 0 & x & x & f \\ 0 & x & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & d & e \\ x & x & f \\ x & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a) \begin{vmatrix} x-d & d & e \\ 0 & x & f \\ 0 & x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d) \begin{vmatrix} x & f \\ x & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)(x-d)(x^2 - xf)$$

$$= x(x-a)(x-d)(x-f)$$