

LINEER DENKLEM SİSTEMLERİ

Tanım. $i=1,2,\dots,m$ ve $j=1,2,\dots,n$ için a_{ij} ler ve b_i ler birer reel sayı $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler bilinmeyenler olmak üzere

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

şeklindeki bir sisteme m denklem ve n bilinmeyenden oluşan bir lineer denklem sistemi denir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine sistemin katsayılar matrisi $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ matrisine bilinmeyenler ve $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ matrisine de sistemin ikinci tarafı denir.

Lineer denklem sistemi $AX=B$ şeklinde ifade edilebilir.

Lineer Denklem Sistemlerinin Denk Matrisler Yardımıyla Çözümü:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$[A:B]$ matrisine artırılmış katsayılar matrisi denir. Yukarıdaki lineer denklem sisteminin çözümü için aşağıdaki yolu izleyeceğiz:

$$AX=B \rightarrow CX=D$$

1) $r_A \neq r_{A:B}$ ise sistemin çözümü yoktur.

2) $r_A = r_{A:B} = r$ ise sistemin çözümü vardır.

a) $r=n$ ise tek bir çözüm vardır.

b) $r < n$ ise $n-r$ keyfi değişkene bağlı sonsuz çözüm vardır.

C satırca eşlen formda ise Gauss eliminasyon indirgenmiş eşlen formda ise Gauss Jordan yöntemi.

Bu şekilde çözüm bulmaya Gauss-Jordan indirgeme yöntemi veya denk matrisler yardımıyla çözüm denir.

Örnek:

$$\begin{cases} -2x+y+5z=1 \\ x+2y-z=0 \\ 3y+2z=1 \end{cases}$$

Lineer denklem sistemini çözüyoruz.

$$[A:B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{H_2(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{H_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{H_{23}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{H_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{H_{32}(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{H_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{H_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$r_A = 3$
 $r_{A:B} = 3$

$r_A = r_{A:B}$ olduğundan sistemin çözümü vardır. $n=3=r$ olduğundan tek çözüm vardır.

$$x=4, y=-1, z=2$$

Örnek:

$$x+y+2z=1$$

$$2y+7z=4$$

$$3x+3y+6z=3$$

lineer denklem sisteminin çözümünü bulunuz

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 3 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_2(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$r_A = r_{[A:B]} = 2$

$r_A = r_{[A:B]} = 2 = r$ sisteminin çözümü vardır

$n=3$, $r < n$ olduğundan $n-r=3-2=1$ keyfi sabite bağlı

sonsuz çözümü vardır

$$y - 3/2 z = -1$$

$$x = \frac{3}{2} z - 1$$

$$y + 7/2 z = 2$$

$$y + \frac{7}{2} z = 2$$

$z=2$ alınırsa $x = 3-1=2$, $y = -7+2 = -5$, $z = 0$

$z=2$ ism çözümdür

$z=2k$ alınırsa $x = 3k-1$, $y = 2-7k$, $z = 2k$ elde edilir

Örnek :

$$\left. \begin{array}{l} 3x+2y=7 \\ 17x+y=0 \\ 6x+4y=3 \end{array} \right\} \text{ lineer denklem sistemini çözümlü.}$$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 17 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_{31}(-2)]{H_{21}(-6)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{22}(3)} \begin{bmatrix} 0 & -31 & -119 \\ -1 & -11 & -42 \\ 0 & 0 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_2(-1)]{H_3(-\frac{1}{11})} \begin{bmatrix} 0 & -31 & -119 \\ 1 & 11 & 42 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_1(-\frac{1}{31})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 119/31 \\ 1 & 11 & 42 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{bmatrix} 1 & 11 & 42 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{12}(-11)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/31 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/31 \\ 0 & 1 & 119/31 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{r_A}$
 $r_{A:B}$

$$r_A = 2, r_{A:B} = 3$$

$$n = 2$$

$r_A \neq r_{A:B}$ olduğundan çözüm yoktur.

Lineer Homojen Denklem Sistemleri

Tanım. $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

şeklindeki bir lineer denklem sistemine lineer homojen denklem sistemi denir. Çünkü $r_A = r_{A:B}$ olduğundan, homojen lineer denklem sisteminin her zaman çözümlü vardır.

$AX=0$ homojen lineer denklem sistemi için $X=0$ daima bir çözümdür. Bu çözüme sıfır çözüm veya aşıkır çözüm denir.

$r_A = r_{A:B} = r$ olsun.

Eğer $r=n$ ise sistemin tek çözümü vardır.

Eğer $r < n$ ise sistemin $n-r$ keyfi değişkene bağlı sonsuz çözümü vardır.

Örnek:

$$\left. \begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ -x+y+z=0 \\ 2x+y-2z=0 \end{array} \right\} \text{Lineer homojen denklem sisteminin} \\ \text{çözümünü bulunuz.}$$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[H_3(-2)]{H_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_3(1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_A = r_{A:B} = 2, n=3$$

$3-2=1$ keyfi değişkene bağlı çözüm

$$x-z=0, y=0, x=k \text{ dersek, } x=t, y=0, z=t$$

Örnek:
$$\begin{cases} -3x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 5y + 2z = 0 \\ 4x + y - 3z = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Lineer homojen denklem} \\ \text{sistemin çözümünü bulunuz.} \end{array} \right\}$$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{H_{21}(2)} \\ \xrightarrow{H_{31}(4)} \end{array} \begin{bmatrix} -1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 19 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} H_1(-1) \\ H_2(\frac{1}{19}) \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & -7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 29 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{H_{12}(7)} \\ \xrightarrow{H_{32}(-29)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_3(-\frac{1}{7})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_A = r_{A:B} = 3 = n$$

Tek çözümü $x=y=z=0$.

Örnek:
$$\begin{cases} 2x - y + 4z = k \\ -x + 4y - 2z = 0 \\ 3x + 2y + 6z = -2 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sistemin çözümünün olması için} \\ k \text{ kaç olmalıdır?} \end{array} \right\}$$

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & k \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & k \\ -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{H_{21}(1)} \\ \xrightarrow{H_{31}(-3)} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & k \\ 0 & 7 & 0 & k \\ 0 & -7 & 0 & -2-3k \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} H_2(1/7) \\ H_{32}(1) \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & k/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2k \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4k/7 \\ 0 & 1 & 0 & k/7 \\ 0 & 0 & 0 & -2-2k \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(A) = 2$$

Eğer çözüm varsa $\text{rank}(A) = \text{rank}(A:B)$ olmalı.

0 halde $\text{rank}(A:B)=2$ olmalı.

$$-2-2k=0 \Rightarrow \boxed{k=-1}$$

Örnek:
$$\left. \begin{array}{l} x+ty+2z=1 \\ 2x+8y+tz=3 \end{array} \right\}$$

i) Sistemin çözümü olmaması için t kaç olmalıdır?

ii) Sistemin tek çözüm olması için t kaç olmalıdır?

iii) Sistemin sonsuz çözümü olması için t kaç olmalıdır?

$$[A:B] = \begin{bmatrix} 1 & t & 2 & 1 \\ 2 & 8 & t & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_2 - 2H_1} \begin{bmatrix} 1 & t & 2 & 1 \\ 0 & 8-2t & t-4 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Çözüm yoksa $\text{rank}(A) \neq \text{rank}(A:B)$

$\text{rank}(A:B)=2$ olduğundan $\text{rank}(A) \neq 2$. 0 halde,

$8-2t=0$ ve $t-4=0$ olmalı. Yani $t=4$ olur.

ii) $n=3$, $r \leq 2$. 0 halde tek çözüm olması mümkün değil.

iii) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A:B)=2$ olmalı.

$$8-2t \neq 0 \text{ veya } t-4 \neq 0 \Rightarrow t \neq 4.$$

Örnek:
$$\left. \begin{array}{l} y-2z=b \\ x-y+z=2 \\ x+ay=3 \end{array} \right\}$$

i) Sistemin çözümü olmaması için $a,b=?$

ii) Sistemin tek çözümü olması için $a,b=?$

iii) Sistemin sonsuz çözümü olması için $a,b=?$