FONKSİYONLAR

Tanım: Bir A kümesinden bir B kümesine tanımlı bir fonksiyon, her bir $x \in A$ elemanına karşılık olarak (tek bir) $f(x) \in B$ elemanı eşleyen bir kuraldır.

$f: A \to B$ veya $A \xrightarrow{f} B$

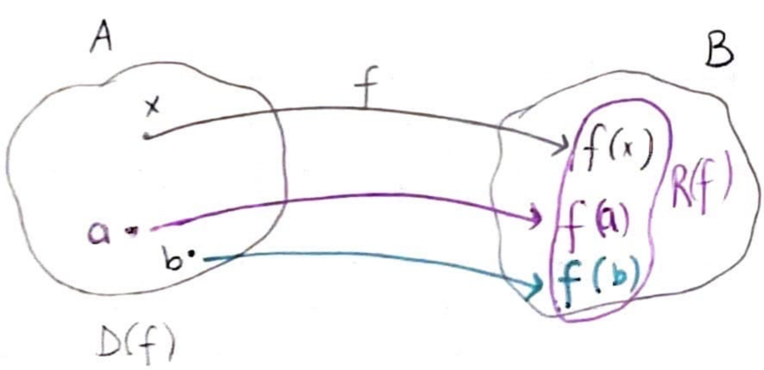
$y = f(x)$ → x: bağımsız değişken (girdi)

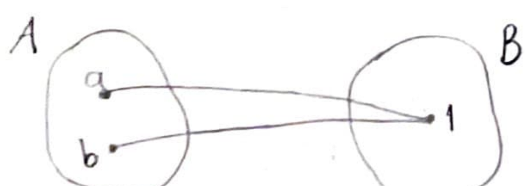
y ↓ bağımlı değişken (çıktı)

$x \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x)$

$D(f) = A$: f nin tanım kümesi (olası tüm girdi değerlerinin kümesi)

$R(f) = \{ y \in B \mid y = f(x), x \in A \} \subseteq B$: f nin görüntü kümesi (olası tüm çıktı değerlerinin kümesi)





1-1 değil

$a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

$\Rightarrow f$ 1-1

$y = x^2$ $\left.\begin{matrix} a = -1 \\ b = 1 \end{matrix}\right\rangle f(1) = f(-1)$

Örnek:

Fonksiyon	$D(f)$	$R(f)$
$y=x^2$	$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$	$[0,\infty)$
$y=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$ $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$y=\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$
$y=\sqrt{4-x}$	$(-\infty,4]$	$[0,\infty)$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$[-1,1]$	$[0,1]$
$y=\frac{x^2}{x}$ $\Updownarrow$ $y=x,\ x\neq 0$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$

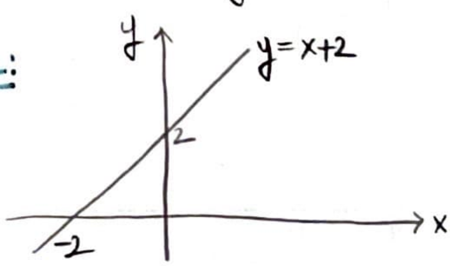
$\left(\begin{array}{l} 4-x\geq 0 \\ x\leq 4 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{l} 1-x^2\geq 0 \\ x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \end{array}\right)$

Bir Fonksiyonun Grafiği

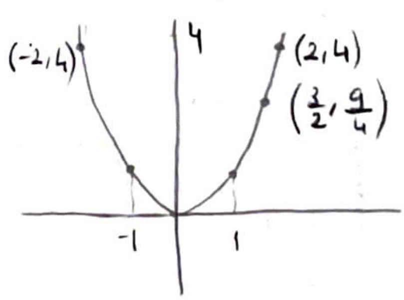
Bir f fonksiyonunun grafiği, $y=f(x)$ denklemini sağlayan noktaların kartezyen düzlemde yerlerinin gösterilmesiyle oluşan grafiktir.

Örnek:



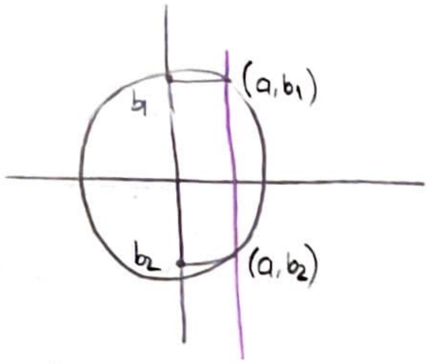
$[-2,2]$ aralığında $y=x^2$

x	f(x)
-2	4
-1	1
0	0
1	1
3/2	9/4
2	4



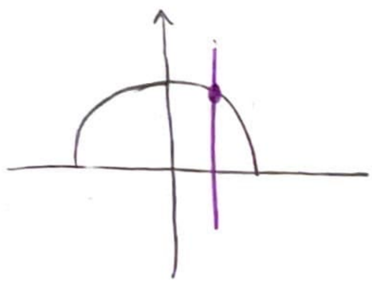
Bir Fonksiyon için Dikey Doğru Testi

Örnek:



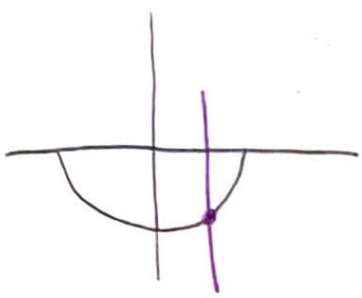
$x^2+y^2=1$

$\left.\begin{array}{l} f(a)=b_1 \\ f(a)=b_2 \end{array}\right] \neq$ Fonksiyonlar grafiği değildir.



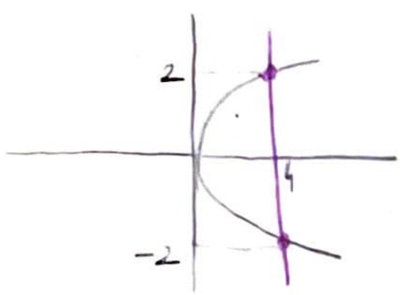
$y=\sqrt{1-x^2}$

Üst yarı çember



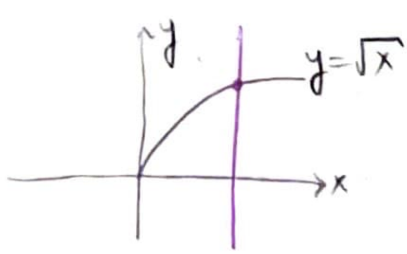
$y=-\sqrt{1-x^2}$

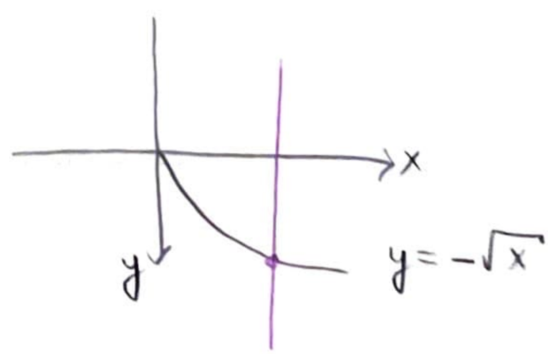
alt yarı.



$x=y^2$

Fonksiyon grafiği değildir.

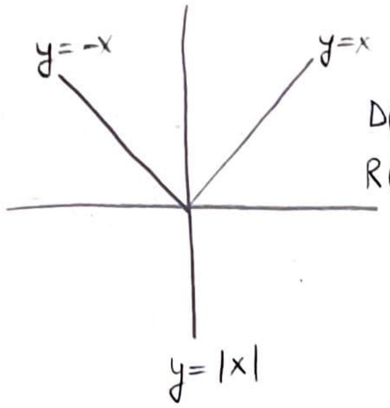




Parçalı Fonksiyonlar

Örnek: mutlak değer fonksiyonu

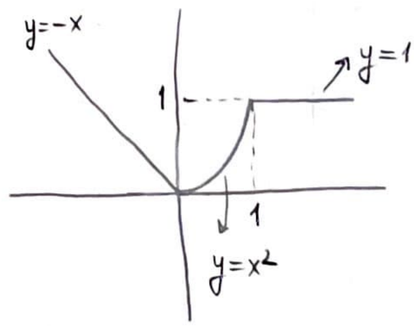
$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



$D(f)=\mathbb{R}$
$R(f)=[0,\infty)$

Örnek:

$$f(x)= \begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$



Artan ve Azalan Fonksiyonlar

a) $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f$ artan

b) $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f$ azalan

$x<0 \Rightarrow f(x)$ azalan $\left(-2<-1 \Rightarrow f(-2) > f(-1)\right)$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(x)$ artan

$x>1$ iken ne artan ne azalan

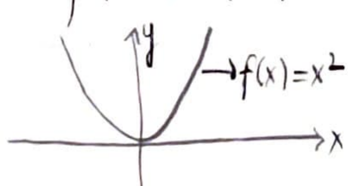
Tek - Çift Fonksiyonlar

$y=f(x)$ fonksiyonunun tanım kümesindeki her x için

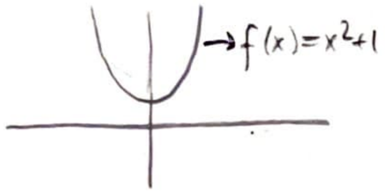
$f(-x) = f(x)$ ise çift fonksiyondur. y-eksenine göre simetrik

$f(-x) = -f(x)$ ise tek fonksiyondur. orijine göre simetrik

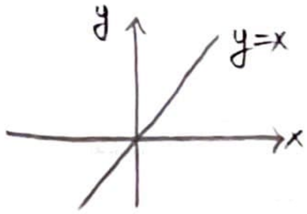
Örnek: $f(x)=x^2$ $\quad f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \Rightarrow f$ çift



$f(x)=x^2+1 \qquad f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x) \Rightarrow f$ çift

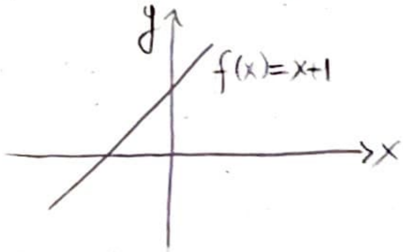


$f(x)=x \qquad f(-x)=-x=-f(x) \Rightarrow$ tek

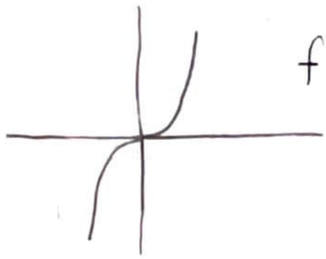


$f(x)=x+1 \Rightarrow f(-x)=-x+1 \neq f(x)$
$\neq -f(x)$

ne tek
ne çift



$f(x)=x^3 \Rightarrow f(-x)=-x^3=-f(x)$



f tek fonk.

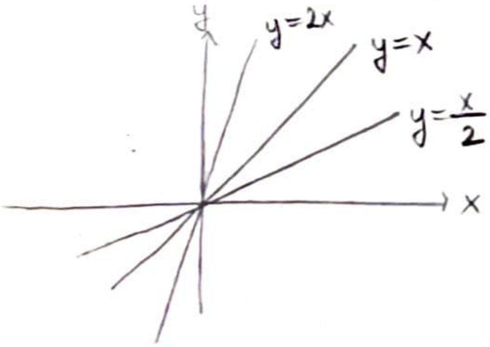
Lineer Fonksiyonlar

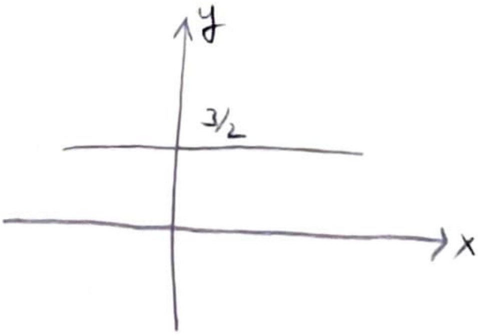
$f(x)=mx+b \qquad m, b:$ sabit

(m: eğim)

$b=0, m=1 \Rightarrow f(x)=x$ birim fonksiyon

$m=0 \Rightarrow f(x)=b$ sabit fonksiyon





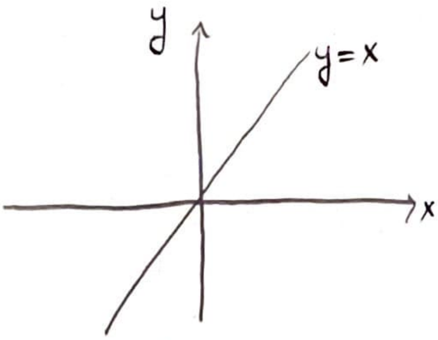
Kuvvet Fonksiyonları

Kuvvet Fonksiyonları

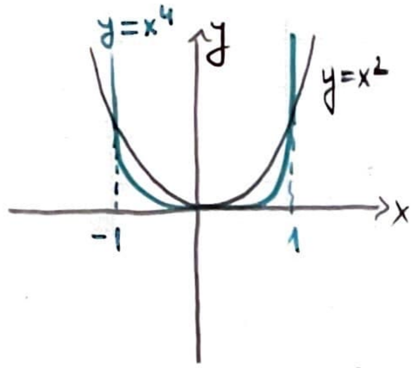
$f(x) = x^n$ (n sabit)

(i) $n > 0$ (n tamsayı)

$f(x) = x^n$ $\quad n = 1, 2, 3, 4, 5$

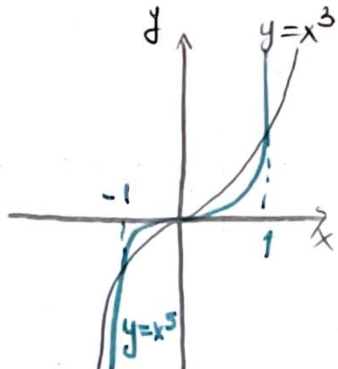


$n=1 \quad y=x$



$n=2 \Rightarrow y=x^2$

$n=4 \Rightarrow y=x^4$

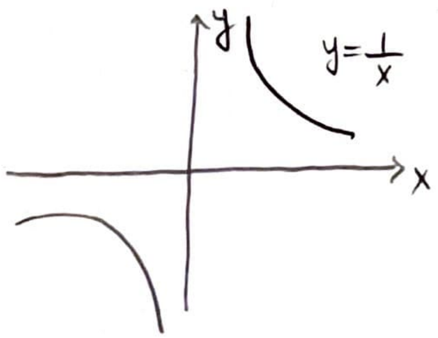


$n=3 \Rightarrow y=x^3$

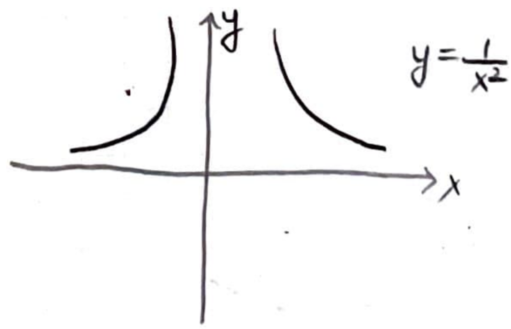
$n=5 \Rightarrow y=x^5$

(ii) $n=-1$ ve $n=-2$ ise

$f(x) = x^n = x^{-1} = \frac{1}{x}$

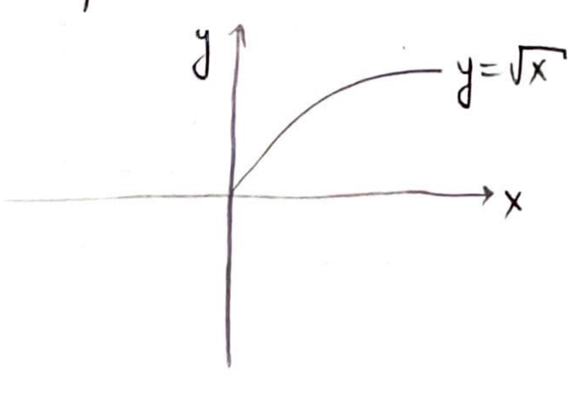


$f(x) = x^n = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

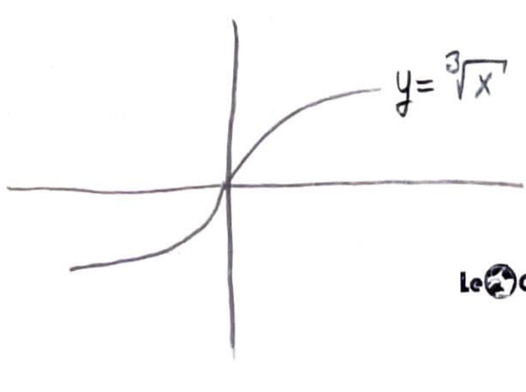


(iii) $n = \frac{1}{2}$ ve $n = \frac{1}{3}$ ise

$f(x) = x^n = x^{\frac{1}{2}}$



$f(x) = x^n = x^{\frac{1}{3}}$



Polinomlar

derece $(a_n \neq 0)$

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $\qquad n \geq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$

başkatsayı

$n=1 \Rightarrow p(x) = ax+b \Rightarrow$ lineer $\qquad D(p) = (-\infty, \infty)$

$n=2 \Rightarrow p(x) = ax^2+bx+c \Rightarrow$ kuadratik

$n=3 \Rightarrow p(x) = ax^3+bx^2+cx+d \Rightarrow$ kübik

Rasyonel Fonksiyonlar

$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$; $q(x) \neq 0$ $\quad$ polinomlar

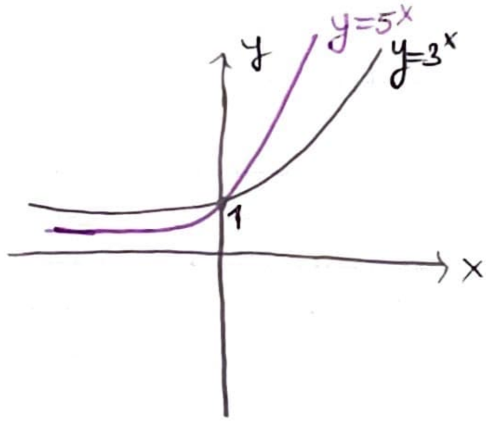
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$

Üstel Fonksiyonlar

$f(x) = a^x \quad a>0 \quad a \neq 1$

$D(f) = (-\infty, \infty)$

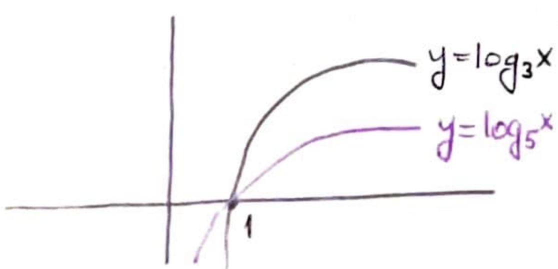
$R(f) = (0, \infty)$



Logaritmik Fonksiyonlar

$f(x) = \log_a x \quad a>0, a \neq 1$

Üstel fonksiyonların ters fonksiyonlarıdır.



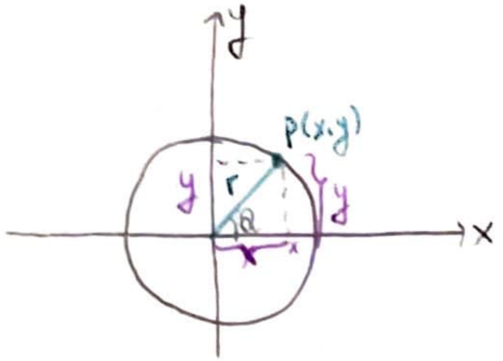
$D(f) = (0, \infty)$

$R(f) = (-\infty, \infty)$

$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$

$\log_e x = y \Leftrightarrow e^y = x \Leftrightarrow \ln x = y$

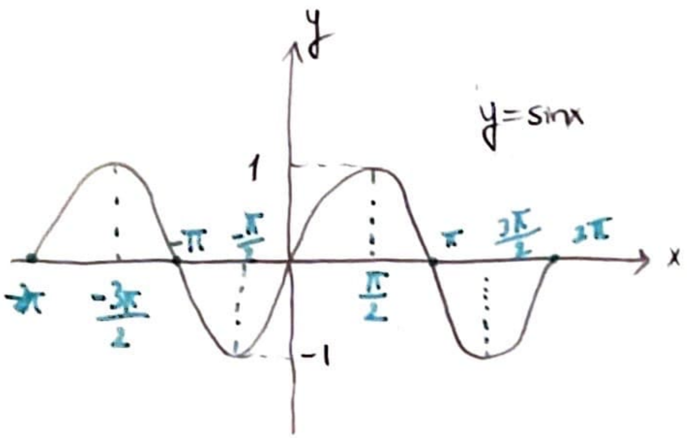
Trigonometrik Fonksiyonlar



$\sin Q = \dfrac{y}{r}$ $\quad \tan Q = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin Q}{\cos Q}$

$\cos Q = \dfrac{x}{r}$ $\quad \cot Q = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\cos Q}{\sin Q}$

$\sec Q = \dfrac{1}{\cos Q} = \dfrac{r}{x}$, $\operatorname{cosec} Q = \dfrac{1}{\sin Q} = \dfrac{r}{y}$

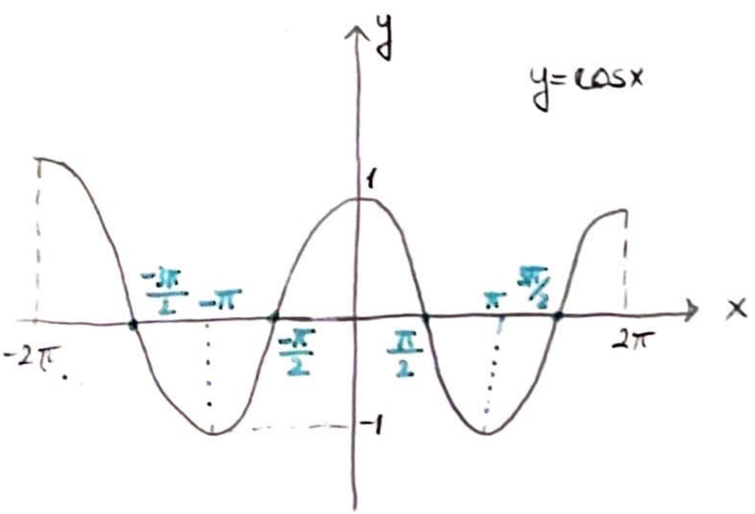


$\sin(-x) = -\sin x \Rightarrow$ tek fonksiyon

$D(\sin x) = (-\infty, \infty)$, $R(\sin x) = [-1, 1]$

$\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, $\sin \pi = 0$

$\sin \frac{3\pi}{2} = -1$, $\sin 2\pi = 0$



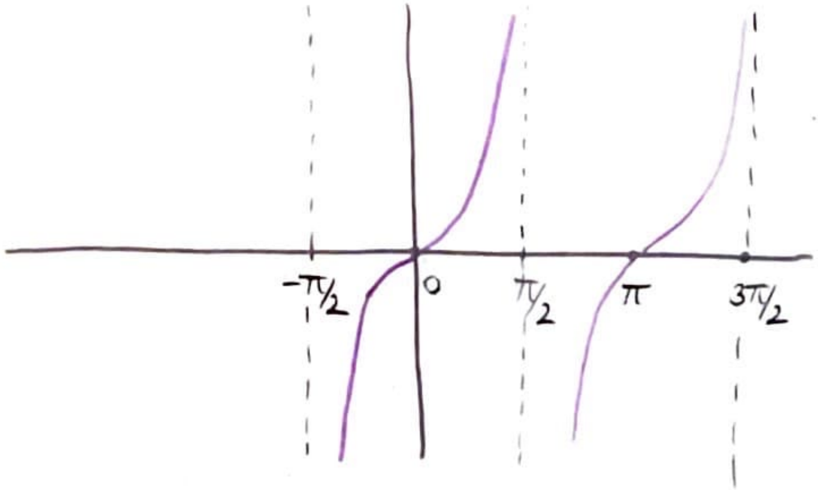
$\cos(-x) = \cos x \Rightarrow$ çift fonksiyon

$D(\cos x) = (-\infty, \infty)$, $R(\cos x) = [-1, 1]$

$\cos 0 = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos \pi = -1$

$\cos \frac{3\pi}{2} = 0$. $\cos 2\pi = 1$

$y = \tan x$

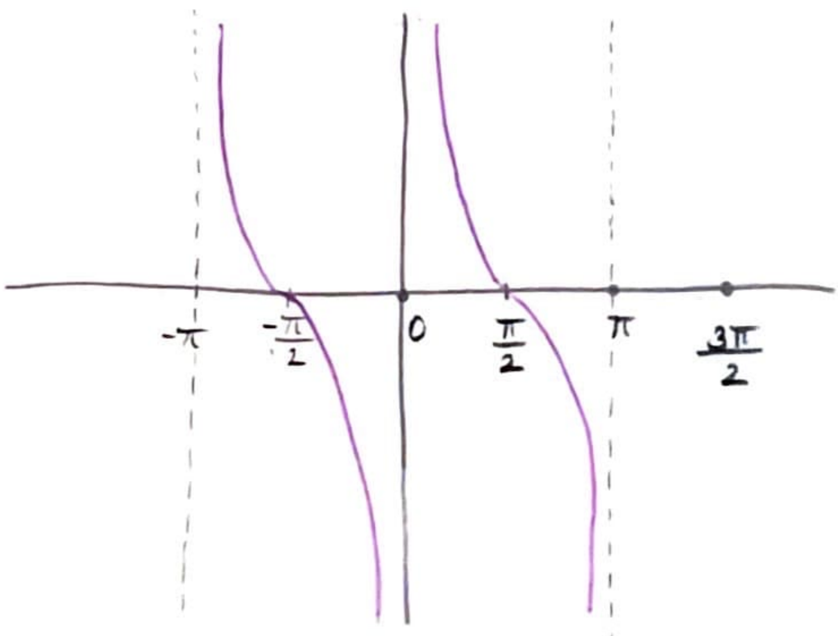


Tek fonksiyon

$D(f) = \{x \neq \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\}$

$R(\tan x) = (-\infty, \infty)$

$y = \cot x$



Tek fonksiyon

$D(f): x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi$

$R(f) = (-\infty, \infty)$

Trigonometrik Özdeşlikler

$x^2+y^2=r^2$: $x=r\cos\theta$ ve $y=r\sin\theta$ için

$\cdot\ r^2=x^2+y^2=r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$

$\Rightarrow \boxed{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$

$1+\cot^2\theta=\operatorname{cosec}^2\theta$

$\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=1-2\sin^2x=2\cos^2x-1$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

Toplam Formülleri

1) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
2) $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
3) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
4) $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Fonksiyonların Özellikleri

1) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$
2) $(fg)(x) = f(x)g(x)$ $\qquad \left(D = D(f) \cap D(g)\right)$
3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $g(x) \neq 0$
4) $(cf)(x) = cf(x)$ $\quad$ (c: sabit)

Bileşke Fonksiyon

$D(fog)$: $g(x)$ in f'nin tanım kümesinde olma koşuluyla g'nin tanım kümesindeki x sayılarını içerir.

$$\underbrace{fog(x) = f(g(x)) \;,\; gof(x) = g(f(x))}_{fog \neq gof}$$

$$fog: \quad x \longrightarrow \boxed{g} \longrightarrow g(x) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(g(x))$$

Örnek: $f(x) = x^2 \qquad g(x) = x-1$

$$\left.\begin{aligned} fog(x) &= f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^2 \\ gof(x) &= g(f(x)) = g(x^2) = x^2-1 \end{aligned}\right\rangle \neq$$

Bir Fonksiyonun Grafiğinin Ötelenmesi

1) Dikey öteleme : $y = f(x) + k$

$k > 0 \Rightarrow$ f nin grafiği k birim yukarı kayar.

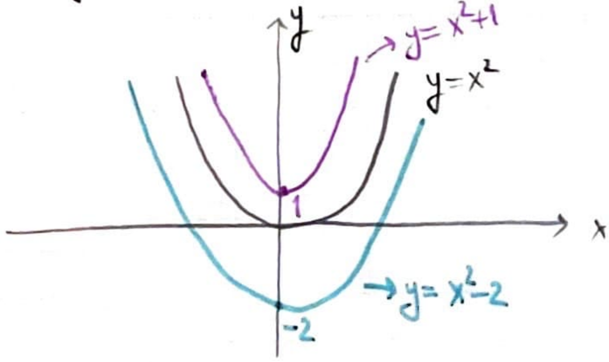
$k < 0 \Rightarrow$ f nin grafiği $|k|$ birim aşağı kayar.

2) Yatay öteleme : $y = f(x+h)$

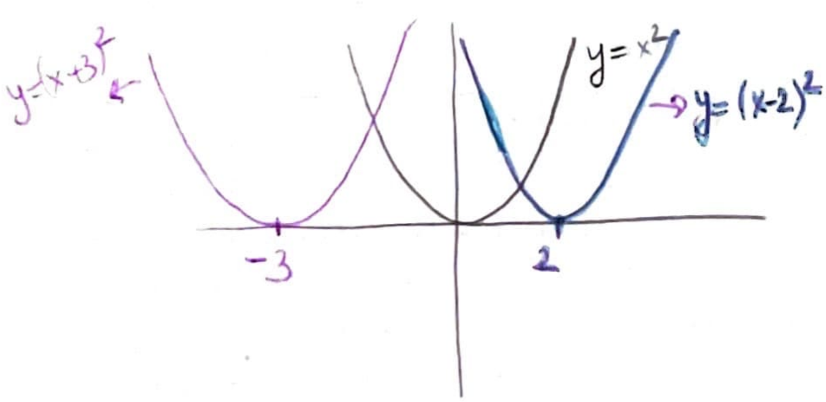
$h > 0 \Rightarrow$ f nin grafiği h kadar sola kayar.

$h < 0 \Rightarrow$ f nin grafiği $|h|$ birim sağa kayar.

Örnek: $y = x^2 + 1$ ve $y = x^2 - 2$



Örnek: $y = (x+3)^2$ ve $y = (x-2)^2$



Örnek: Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümesini bulunuz-

1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ 2) $y=\ln x+\sqrt{9-x^2}$ 3) $\sqrt{\ln\dfrac{5x-x^2}{4}}$

1) $|x|-x\geq 0$ ve $|x|-x\neq 0 \Rightarrow |x|-x>0$

$\Rightarrow |x|>x$

$\Rightarrow x<0 \; : \; (-\infty,0)$

2) $x>0$ ve $\underbrace{9-x^2\geq 0}_{-3\leq x\leq 3}$ $\Bigg\}$ $D(f)=(0,3]$

3) $\ln\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 0$ ve $\dfrac{5x-x^2}{4}>0$

$\Downarrow$

$\dfrac{5x-x^2}{4}\geq 1 \Rightarrow 5x-x^2\geq 4$

$\Rightarrow (x-4)(x-1)\leq 0$

$\Rightarrow D(f)=[1,4]$

Örnek: $y=\sqrt{2x^2-x} \Rightarrow D(f)=?$

$2x^2-x\geq 0 \Rightarrow x(2x-1)\geq 0$

$x=0$ $x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		∞
		$+$	0	$-$	0	$+$	

$D(f)=(-\infty,0]\cup[\frac{1}{2},\infty)$

LimiT

Bir Fonksiyonun Limiti

Örnek: $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ fonksiyonunun $x=1$ civarındaki davranışı nasıldır?

$f(x)=\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}$, $x\neq 1$

$f(x)=x+1$, $x\neq 1$

x	f(x)
0.9	1.9
0.999	1.999
0.99999	1.99999
1.1	2.1
1.001	2.001
1.00001	2.00001

$\lim_{x\to 1} f(x)=2.$

Tanım. $f(x)$, x_0 civarında (x_0 olmayabilir) bir açık aralıkta tanımlı olsun. x_0'a yeterince yakın x değerleri için $f(x)$ keyfi L değerine yaklaşıyorsa x, x_0'a yaklaşırken f'nin L limit değerine yaklaştığını söyleriz ve aşağıdaki gibi gösteririz.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L}$$

Örnek: 1) $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 2) $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$ 3) $h(x)=x+1$

$f(1)$ tanımlı değil ama $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

$g(1) = 1$, $\underbrace{\lim_{x\to 1} g(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2$

$$g(1) \neq \lim_{x\to 1} g(x)$$

$h(1) = 2 = \lim_{x\to 1} h(x)$

$y = f(x)$, $x = a$

1) $f(x)$, a yı içeren bir açık aralıkta tanımlı ve

2) $f(x)$ in grafiği herhangi bir kırılma olmadan $(a, f(a))$ noktasında

geçiyorsa,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$f(x)$, $x=a$ da tanımlı değilse bazı uygun cebirsel işlemler

yapılarak $\lim_{x\to a} f(x)$ hesaplanır.

<u>Örnek:</u> $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)\cancel{(x-1)}}{x\cancel{(x-1)}} = \frac{3}{1} = 3$

<u>Örnek:</u> $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x^2-1}-1}{x-1} \cdot \frac{(\sqrt{2x^2-1}+1)}{(\sqrt{2x^2-1}+1)}$

$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x^2-1)}{(x-1)(\sqrt{2x^2-1}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x+1)}{\sqrt{2x^2-1}+1} = \frac{4}{2} = 2$