

1) Bir fonksiyonun $f(x)$, $x=a$ noktasındaki türevi şu şekilde tanımlanır

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2) $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$

$$m(x - x_0) + y_0 = y$$

3) • Sabit fonksiyon:

$$f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

• Çarpım kuralı:

$$\frac{d}{dx} [k \cdot f(x)] = k \cdot f'(x)$$

• Kuvvet kuralı:

$$\frac{d}{dx} [x^p] = p \cdot x^{p-1} \cdot x'$$

• Toplam ve farkın türevi:

$$\frac{d}{dx} [f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$$

• Çarpımın türevi:

$$\frac{d}{dx} [f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

• Bölümün türevi:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$$

4) bileşke fonksiyonun türevi:

$$(f \circ g(x))' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

5) trigonometrik fonksiyonların türevleri:

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\tan(x))' = \frac{1 + \tan^2(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

$$(\cot(x))' = \frac{-1 - \cot^2(x)}{\sin^2(x)} = -\csc^2(x)$$

6) ters trigonometrik fonksiyonların türevleri:

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arccot}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

7) diferansiyel kavramı:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \implies \underbrace{f'(x) \cdot dx}_{\text{DİFERANSİYEL}}$$

yaklaşık değer:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$$

SORULAR

$$1) \left. \begin{array}{l} x = 4 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{array} \right\} \text{ ise } \frac{dy}{dx} = ?$$

$$x = 4 \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = -4 \cdot \sin t$$

$$dx = -4 \cdot \sin t \cdot dt$$

$$y = 3 \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3 \cdot \cos t$$

$$dy = 3 \cdot \cos t \cdot dt$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot \cos t \cdot dt}{-4 \cdot \sin t \cdot dt} = \frac{-3}{4} \cdot \cot(t)$$

2) $\sqrt{35,89}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız.

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$a = 36$$

$$h = -0,4$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x} \\ a = 36 \\ h = -0,4 \end{array} \right\} \sqrt{35,89} \approx 6 + \frac{1}{12} \cdot \frac{-11}{100}$$

3) $y = \tan x$ eğrisinin $x_0 = 0$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y_0 + m \cdot (x - x_0) = y$$

$$(\tan(0))' = 1$$

$$y = x$$

$$\tan(0) = 0$$

$$4) y = 4x \cos(\arcsin \frac{x}{3}) \text{ ise } y' = ?$$

$$(4x \cdot \cos(\arcsin \frac{x}{3}))'$$

$$= 4 \cdot \cos(\arcsin \frac{x}{3}) + 4x \cdot -\sin(\arcsin \frac{x}{3}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 4 \cos(\arcsin \frac{x}{3}) + 4x \cdot \frac{-x}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}} \cdot \frac{1}{3}$$

$$= 4 \cos(\arcsin \frac{x}{3}) - \frac{4x^2}{9\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}$$

$$5) f(x) = \frac{\tan \sqrt{x^2+1}}{\sin \sqrt{x}} \text{ ise } f'(x) = ?$$

$$(\tan \sqrt{x^2+1})' = \sec^2 \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

$$(\sin \sqrt{x})' = \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sec \sqrt{x^2+1})^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x \cdot \sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \tan \sqrt{x^2+1}}{(\sin \sqrt{x})^2}$$

$$= \frac{\frac{(\sec \sqrt{x^2+1})^2 \cdot x \cdot \sin \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\cos \sqrt{x} \cdot \tan \sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x}}}{(\sin \sqrt{x})^2}$$

6) Fonksiyonların türelerini hesaplayınız.

$$\bullet \quad 2\sqrt{x} - \csc x = y$$

$$(2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \left((\sin x)^{-1}\right)' = -1 \cdot (\sin x)^{-2} \cdot \cos x$$

$$(\csc x)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$-(\csc x)' = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\bullet \quad \frac{\cot x}{x} - \frac{x}{\cot x} = y$$

$$\left(\frac{\cot x}{x}\right)' = \frac{-\csc^2 x \cdot x - \cot x}{x^2}$$

$$\frac{-x}{\cot x} = \frac{-1 \cdot \cot x - (+\csc^2 x) \cdot (+x)}{\cot^2 x}$$

$$\frac{-1 \cdot (\csc^2 x \cdot x + \cot x)}{x^2} = \frac{\cot x + x \cdot \csc^2 x}{\cot^2 x}$$

- $\cos^2(\sin x) = y$

$$y' = 2 \cdot \cos(\sin x) \cdot -\sin(\sin x) \cdot \cos x \cdot 1$$

$$= -8 \cos(\sin x) \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos x$$

- $(2x^4 - 7x)^3 = y$

$$y' = 3 \cdot (2x^4 - 7x)^2 \cdot (8x^3 - 7)$$

- $\frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} = y$

$$(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot 2$$

$$((\cos 2x)^2)' = 2 \cdot \cos 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = -4 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x$$

$$y' = \frac{2 \cos 2x \cdot (\cos 2x)^2}{(\cos 2x)^4} + \frac{4 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x}{(\cos 2x)^4}$$

$$y' = \frac{2}{\cos 2x} + \frac{4 \sin^2 2x}{\cos^3 2x}$$

7) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = 3x^2$ olduğuna göre $f'(2)$ varsa bulunuz.
 $f'(0)$ varsa bulunuz. (limit tanımını kullanarak)

$f'(2+)$ ifadesi $f'(2-)$ ifadesine eşit mi kontrol edelim.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \quad \left. \vphantom{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}} \right\} \text{VURAL}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(a^2 + 2ah + h^2) - 3a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3a^2 + 6ah + 3h^2 - 3a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h^2 + 6ah}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3h + 6a)}{h}$$

$$= 6a$$

$$f'(2) = 12$$

$$f'(0) = 0$$

8) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x\sqrt{x}$ x_0 varsa bulunuz. (limit tanımı kullanarak)
 noktasında türev

KURAL: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(x_0+h)^{\frac{3}{2}} - (x_0)^{\frac{3}{2}}}{h} =$$

$$9) \left(\frac{x^2 - 3x - 1}{2x - 1} \right)^2 = y$$

$$y' = \frac{2(x^2 - 3x - 1)}{2x - 1} \cdot \left[\frac{(2x - 3) \cdot (2x - 1) - 2(x^2 - 3x - 1)}{(2x - 1)^2} \right]$$

$$x^2(1-x)^7 = y$$

$$y' = 2x \cdot (1-x)^7 + 7 \cdot (1-x)^6 \cdot x^2 \cdot (-1)$$

$$10) y = \sin x$$

$x_0 = \frac{\pi}{2}$ için elde edilen noktanın teğet denklemi nedir?

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$m = \frac{y - L}{x - \frac{\pi}{2}}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 1 \right) \text{ noktası}$$

$$\text{eğim} = 0$$

$$y = 1$$

$$11) x^3y - \sqrt{xy^2} + 3 = 0 \rightarrow y' = ?$$

$$(\sqrt{xy^2})' = \frac{1}{2\sqrt{xy^2}} \cdot (y^2 + 2y \cdot y' \cdot x)$$

$$3x^2y + y'x^3 - \frac{y^2}{2\sqrt{xy^2}} - \frac{y' \cdot y \cdot x}{\sqrt{xy^2}} = 0$$

$$y'x^3 - y' \cdot \left(\frac{xy}{\sqrt{xy^2}} \right) = \frac{y^2}{2\sqrt{xy^2}} - 3x^2y$$

...

SLAYT 7

1) $xy - 1 = 0$ ise $y' = ?$

$$y + y' \cdot x = 0$$

$$xy - 1 = 0$$

$$y' = \frac{-y}{x}$$

$$xy = 1$$

$$y = \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

2) $x^2 + y^2 = 1$ ise $y' = ?$

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$2y \cdot y' = -2x$$

$$y' = \frac{-2x}{2y}$$

$$y' = \frac{-x}{y}$$

3) $xy^3 + x^3y - 1 = 0$ ise $y' = ?$

$$(y^3 + 3y^2 \cdot y' \cdot x + 3x^2 \cdot y + y' \cdot x^3) = 0$$

$$y' \cdot 3y^2x + y' \cdot x^3 = -y^3 - 3x^2y$$

$$y' = \frac{-y^3 - 3x^2y}{3xy^2 + x^3}$$

$$4) \sin y = y \cdot \cos 2x$$

$$\cos y \cdot y' = y' \cdot \cos 2x + y \cdot -\sin 2x \cdot 2$$

$$\cos y \cdot y' - \cos 2x \cdot y' = -2 \sin 2x \cdot y$$

$$y' (\cos y - \cos 2x) = -2 \sin 2x \cdot y$$

$$y' = \frac{-2 \sin 2x \cdot y}{\cos y - \cos 2x}$$

5) $y - xy^2 + x^2 + 1 = 0$ eğrisinin $(1, -1)$ noktasındaki teğet denklemini bulunuz.

$$y' - (y^2 + 2y \cdot y' \cdot x) + 2x = 0$$

$$y' - y^2 - 2y \cdot y' \cdot x + 2x = 0$$

$$y' (1 - 2xy) = y^2 - 2x$$

$$y' = \frac{y^2 - 2x}{1 - 2xy}$$

$$\frac{1 - 2}{1 + 2} = \frac{-1}{3}$$

$$\text{eğim} = \frac{-1}{3} = \frac{y+1}{x-1}$$

$$\frac{-x}{3} + \frac{1}{3} = y + 1$$

$$y = \frac{-x - 2}{3}$$

6) $5y^2 - 8x^4 + 3 = 0$ $(2, 2)$ noktasında teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

$$5y^2 - 8x^4 + 3 = 0$$

$$10y \cdot y' - 32x^3 = 0$$

$$y' = \frac{32x^3}{10y}$$

$$y' = \frac{32}{10}$$

$$\frac{32}{10} = \frac{y-1}{x-1} \rightarrow 32x - 32 = 10y - 10$$

$$y = \frac{32x - 22}{10}$$

$$7) (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$(\log_b u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln b}$$

} Kural

$$\ln(3x^2 + 5x + 8\ln x) = y \quad \text{ise } y' = ?$$

$$\text{KURAL: } (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\frac{6x + 5 + 8 \cdot \frac{1}{x}}{3x^2 + 5x + 8\ln x}$$

$$8) x \cdot \log_3 (2x^2 + x) = y \text{ ise } y' = ?$$

$$\text{KURAL: } (\log_b u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln b}$$

$$\log_3 (2x^2 + x) + x \cdot \frac{(4x+1)}{(2x^2+x) \cdot \ln 3}$$

9) $f(x) = \ln(x^2)$ grafiği üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki o noktada çizilen teğetin eğimi 1 olsun.

$$\text{KURAL: } (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

$$\text{KURAL: } (\log_b u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \cdot \ln b}$$

$$\frac{2x}{x^2} = 1$$

$$2x = x^2$$

$$x=0 \text{ veya } x=2$$

α

✓

$$\text{NOKTA: } (2, 2\ln 2)$$

10) e^x fonksiyonunun türevini bulalım.

$$\ln e^x = \ln y$$

$$x \cdot \ln e = \ln y$$

$$x = \ln y$$

$$(x)' = (\ln y)'$$

$$1 = \frac{y'}{y}$$

$$y' = y$$

$$(e^x)' = e^x$$

Ayrıca $b > 0$ ve $b \neq 1$ olmak üzere

$$b^x = y$$

$$\ln b^x = \ln y$$

$$(x \cdot \ln b)' = (\ln y)'$$

$$\ln b = \frac{y'}{y}$$

$$y' = \ln b \cdot y$$

$$y' = \ln b \cdot b^x$$

11) Fonksiyonların türevlerini bulalım.

• $y = e^{(2x^3+5x+2)}$

$$\ln y = \ln e^{(2x^3+5x+2)}$$

$$\ln y = 2x^3 + 5x + 2$$

$$\frac{y'}{y} = 6x^2 + 5$$

$$y' = e^{2x^3+5x+2} \cdot (6x^2+5)$$

• $x^2 \cdot 2^{x^2} = y$

$$(x^2)' = 2x$$

$$\ln 2^{x^2} = \ln k \quad 2^{x^2} = k$$

$$x^2 \cdot \ln 2 = \ln k$$

$$2x \cdot \ln 2 = \frac{k'}{k}$$

$$k' = 2x \cdot \ln 2 \cdot 2^{x^2}$$

$$(2^{x^2})' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2$$

$$2x \cdot 2^{x^2} + 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2 \cdot x^2$$

$$12) y = (x^2+1)^x \text{ ise } y' = ?$$

$$\ln y = \ln (x^2+1)^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln (x^2+1)$$

$$(\ln y)' = (x \cdot \ln (x^2+1))'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln (x^2+1) + \frac{2x}{x^2+1} \cdot x$$

$$y' = (x^2+1)^x \left(\ln (x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1} \right)$$

$$13) y = x^{\sqrt{x}} \text{ ise } y' = ?$$

$$\ln y = \ln x^{\sqrt{x}}$$

$$\ln y = \sqrt{x} \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sqrt{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}$$

$$y' = x^{\sqrt{x}} \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)$$

14) $\frac{0}{0}$ ve $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlikleri için L'Hospital kuralından yararlanılır.

L'Hospital Kuralı: eğer $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ ve $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti mevcut veya $+\infty$ veya $-\infty$ ise, bu durumda

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

15) $x \rightarrow c$ yaklaşımı yerine $x \rightarrow c^-$, $x \rightarrow c^+$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$ alınırsa, L'Hospital kuralı yine geçerlidir.

- L'Hospital kuralı $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliğinde de geçerlidir.
- Belirsizlik devam ettiği ve koşullar sağlandığı sürece L'Hospital kuralı birden fazla kez uygulanabilir.
- Limit hesabında L'Hospital kuralı kullanılırken kesrin belirsiz halde olduğundan emin olunmalıdır.

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+3} = \frac{6}{5}$$

$$x^2 + 2x - 8 = (x+4)(x-2)$$

$$\begin{array}{r} x \\ x \end{array} \begin{array}{r} +4 \\ -2 \end{array}$$

$$x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$$

$$\begin{array}{r} x \\ x \end{array} \begin{array}{r} +3 \\ -2 \end{array}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{20} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{20 \cdot x^{19}}{1} = 20$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

L'Hospital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

L'Hospital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{\cos x - 1}$$

L'Hospital

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2}{-\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin(2x) \cos(2x)}{-\sin x}$$

L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4(\cos 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot 2 \cdot \sin 2x)}{-\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(\cos^2 2x - \sin^2 2x)}{-\cos x}$$

$$= -8$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = ? \left\} \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

$$21) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = ? \left\} \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2 \cdot e^{2x}} \left\} \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{2 \cdot e^{2x}} \left\} \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{8e^{2x}} = 0$$

22) $0 \cdot \infty$ belirsizliği ile karşılaşıldığında aşağıdaki yöntem izlenir.

• $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$ limitinde $0 \cdot \infty$ belirsizliği söz konusu

ise;

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ veya } \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \text{ yazılarak}$$

$\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlikleri elde edilir.

- $\lim_{x \rightarrow c} f(x) - g(x)$ limitinde $\infty - \infty$ belirsizliği varsa

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

yazılarak $\frac{0}{0}$ belirsizliğine dönüştürülebilir.

23) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = ?$

$0 \cdot (-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0$$

24) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2}) \cdot \tan x$

$0 \cdot \infty$ belirsizliği geldi

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})}{\frac{1}{\tan x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(x - \frac{\pi}{2})}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$= -1$

25) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = ?$

$\infty \cdot 0$ belirsizliği var.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \left\} \frac{0}{0} \text{ belirsizliği} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x-2} \quad \frac{4}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{4}$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = ?$$

$$\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\infty - \infty = \frac{\text{sayı}}{0} - \frac{\text{sayı}}{0}$$

28) 1^∞ , 0^0 ve $\infty^0 \rightarrow \frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ benzerimlidir.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}} = ? \quad 1^{\frac{1}{0^+}} = 1^\infty //$$

1. adım

$$y = (x+1)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln(x+1)$$

2. adım

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln 1}{0} \rightarrow \frac{0}{0} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{1}} = 1$$

3. adım

$$\ln y = 1$$

$$\log_e y = 1$$

$$y = e^1 = e \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = ? \quad \rightarrow \text{bestimmt}$$

1. adm

$$y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$$

2. adm

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \quad \text{bestimmt}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} \right)}{\frac{-1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{(x-1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)}{(x+1)} \cdot \frac{-x^2}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2 \end{aligned}$$

$$\ln y = 2$$

$$y = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x = e^2$$

30) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \rightarrow \infty^0$ bestimmt vor.

1. ordnung $y = x^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

2. ordnung

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ bestimmt}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln y = 0$$

$$y = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

31) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{\ln x}} \rightarrow 0^0$ bestimmt vor.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{\ln x} = 2$$

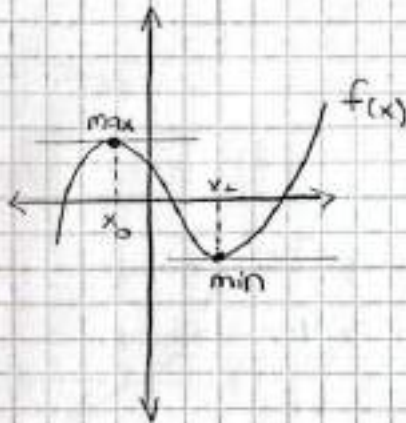
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln y = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{2}{\ln x}} = e^2$$

$f(x) = \text{---} \rightarrow f'(x)$ $\rightarrow f(x)$ in artan - azalan olduğu noktalar

$\rightarrow$ maksimum - minimum noktalar.

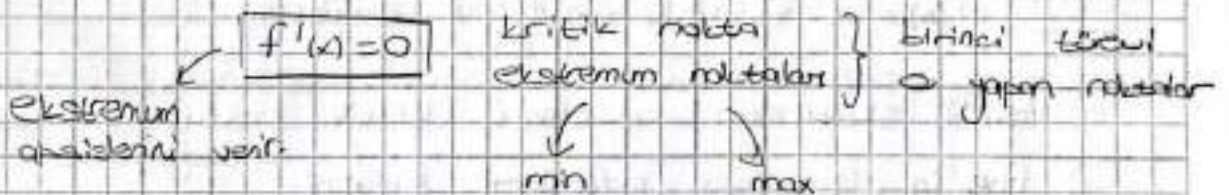


max ve min noktalarındaki çizilen teğetler x eksenine paralel olur.

x 'e paralel doğruların eğimi 0'dır.

$$\boxed{f'(x_0) = 0} \quad \boxed{f'(x_1) = 0}$$

grafik yok iken $f'(x) = 0$ türevi 0 yapan x 'ler maksimum, minimum noktaların işaretleridir.



Birinci türevi 0 yapan x 'ler ekstremum işaretlerini verirler.

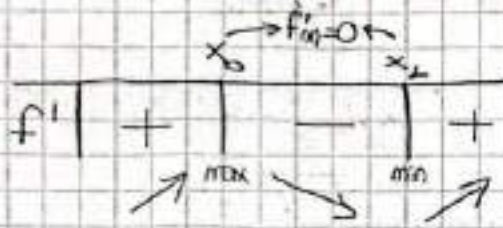
x değerleri arttıkça y değerleri artıyorsa fonksiyon artandır.
 fonksiyonun artan olduğu aralıkta türevlerin sonuçları pozitifdir.

x değerleri arttıkça y değerleri azalıyorsa fonksiyon azalandır.

fonksiyonun azalan olduğu aralıkta türevlerin sonuçları negatiftir.

$f'(x) > 0$ artan aralığı verir.

$f'(x) < 0$ azalan aralığı verir.



Çıkarm:

1. adım

$$f(x) \rightarrow f'(x) = 0$$

türevi 0 yapan x 'ler bulunur.



türevin işaret tablosu çizilir.



Soru: $f(x) = x^3 - 27x + 1$ fonksiyonu veriliyor.

A) $f(x)$ 'in ekstremum noktalarını (kritik nokta) bulunuz.

B) $f(x)$ 'in ekstremum noktalarını bulunuz.

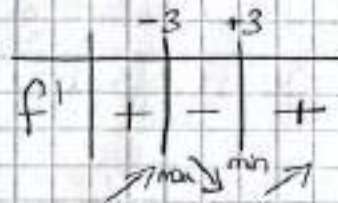
C) $f(x)$ 'in artan ve azalan olduğu noktaları bulunuz.

D) $f(x)$ 'in maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

$$f(x) = x^3 - 27x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

$$x = \pm 3$$



$$(-3, 55) \rightarrow \max$$

$$(3, -53) \rightarrow \min$$

NOT:

$f(x) = 0$ yapan her x ekstremum olmayabilir

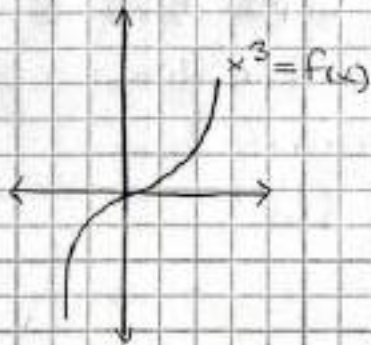
$f'(x) = 0$ + türevin işareti
0 noktada değişmez $\Rightarrow$ ekstremum arıtır
değişmezdir

$$f'(2) = 0$$

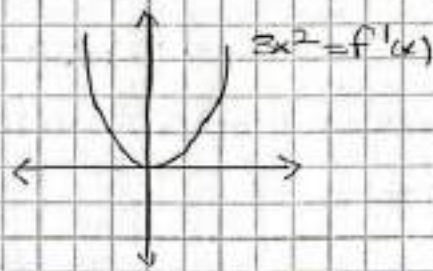
$$f'(3) = 0$$

	2	3	
f'	-	+	+

2 3 a ekstremum değildir



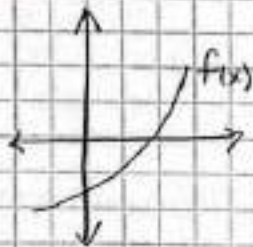
Fonksiyonda azalan
aralık yoktur.



Fonksiyonun türevi daima pozitif
veya sıfırdır.

Türev işareti değiştirmedigi için fonksiyonun ekstremum
noktası yoktur.

Daima Artan Fonksiyonlar



$f'(x) > 0$ her x için türev sıfırdan
büyükse türev daima artan olur.

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

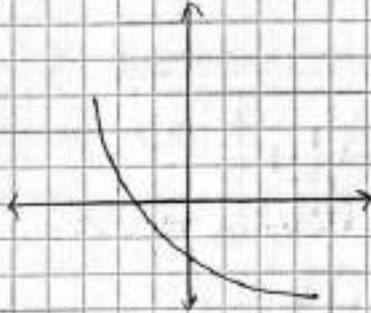
$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

türevi $\Rightarrow$ pozitif
x yoktur

$$f'(x) > 0$$

fonksiyon daima artan

Daima azalan fonksiyonlar



$f'(x) = 0$ şartını sağlayan x yoktur.

$f'(x) < 0$ her x için türev negatiftir.

$$f(x) = -4x + 5$$

$$f'(x) = -4$$

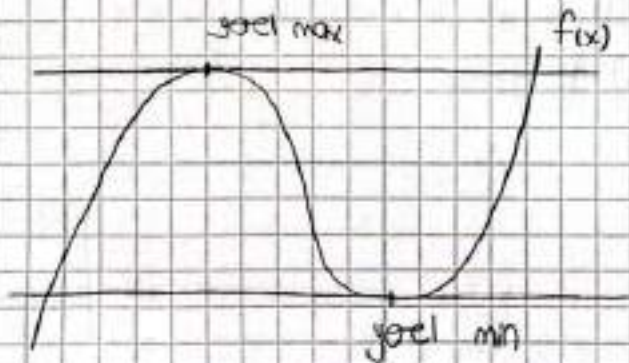
$$f'(x) < 0$$

fonksiyon daima azalırdır.

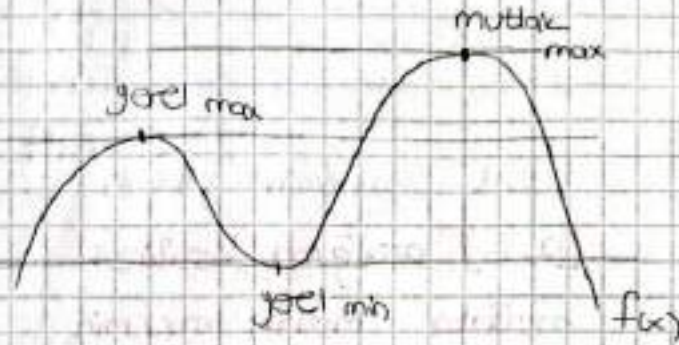
maks ve min

↓
yerel max
yerel min

→ mutlak max
mutlak min



mutlak maksimum - minimum
yok



mutlak maksimum var
mutlak minimum yok.

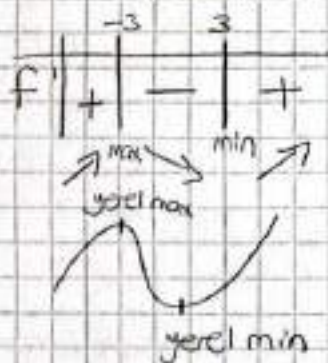
mutlak max/min aynı zamanda birer yerel max/min olarak kabul edilir.

$f(x) = x^3 - 27x + 1$ maks, min noktalarını bulup yerel veya mutlak olarak sınıflandırınız.

$f'(x) = 0$ + işaret tablosunda işaret değişimi

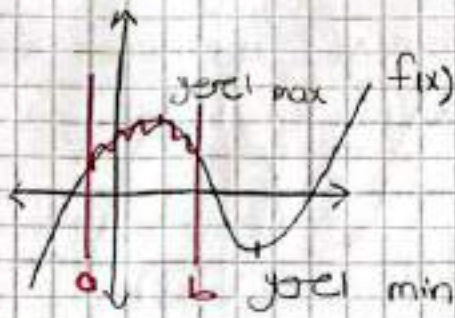
$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

$$x = \pm 3$$



yerel max = $(-3, 55)$

yerel min = $(3, -53)$



mutlak max/min yoktur
 $[a, b]$ aralığında kesilirse
 mutlaka mutlak max/min
 olur.

Adaylar

- ① Sınırlar direkt mutlak max/min adaydır.
 $[a, b]$ aralığında tanımlı $f(x)$ fonksiyonunda
 $f(a)$ $\rightarrow$ değerleri incelenir.
 $f(b)$ $\rightarrow$

- ② $[a, b]$ aralığına düşen ekstremum var mı bakılmalıdır.

$$f'(c) = 0 \text{ ise}$$

$$f(c) \text{ değeri incelenir.}$$

- ③ Bu adaylardan en büyük sonucu çıkaran mutlak maksimum
 en küçük sonucu çıkaran mutlak minimum olur.

$f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[-2, 3]$ aralığında mutlak max/min
 bulunuz.

$$f(-2) = 4$$

$$f(3) = 9 \rightarrow \text{mutlak max}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow \text{mutlak min}$$

$f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun $[-2, 2]$ aralığında mutlak max ve min değerlerini bulun.

$$f(-2) = -7 \rightarrow \text{mutlak min.} \quad f'(x) = 3x^2 = 0$$

$$f(2) = 9 \rightarrow \text{mutlak max.} \quad x = 0 \in [-2, 2]$$

$$f(0) = 1$$

$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $[-1, 1]$ aralığında mutlak max ve min noktalarını bulunuz.

$$f(-1) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{mutlak min.} \quad f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0$$

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = 1 \rightarrow \text{mutlak max.} \quad x = 0$$

maksimum ve minimum noktaları 2. türev testi ile belirlenir.

$f(x) \rightarrow f'(x) = 0$ türevi 0 yapan bir nokta x_1 olsun.

$f'(x_1) = 0$ iken $f''(x_1) > 0$ min nokta apsisi

$f'(x_1) = 0$ iken $f''(x_1) < 0$ max nokta apsisi

$f'(x_1) = 0$ iken $f''(x_1) = 0 \rightarrow x_1$ max veya min apsisi değildir.

$f(x) = x^3 - 27x + 1$ max ve min noktalarını ilkin; türev testi kullanarak belirleyin.

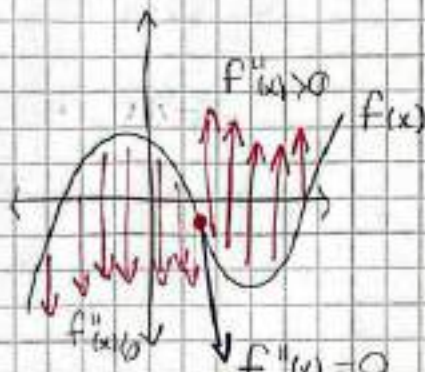
$$f'(x) = 3x^2 - 27 = 0 \quad f''(x) = 6x$$

$$x = \pm 3$$

$$f''(-3) = -18 \text{ max nokta apsisi}$$

$$f''(3) = 18 \text{ min nokta apsisi}$$

$$f(x) \longrightarrow f''(x)$$



$f''(x) = 0$ dönüm veya büküm noktasının
opsisi

$f''(x) < 0 \rightarrow$ eğriliğin yönü $\rightarrow$ içi büküye $\rightarrow$ konkav
aşağı

$f''(x) > 0$ eğriliğin yönü $\rightarrow$ dış büküye $\rightarrow$ konveks
yukarı

$f''(x) = 0$ yapan her x dönüm (büküm) noktası olmayabilir

$f'' \mid + \mid -$ } dönüm (büküm) noktasıdır

$f'' \mid + \mid +$ } dönüm (büküm) noktası değildir

$f(x) = x^3 - 27x + 1$ fonksiyonunun

A) Büküm noktası nedir?

B) iç büküm ve dış büküm olduğu aralıklar nelerdir?

A) $f(x) = x^3 - 27x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 27$$

$$f''(x) = 6x = 0 \text{ ise } x = 0$$

$$f'' \begin{array}{c|c} - & + \\ \hline \cap & \cup \end{array}$$

Büküm noktası = $(0, 1)$

KURAL: $f''(x) < 0$ ise eğrilik yönü aşağı

iç büküm
konkav



$f''(x) > 0$ ise eğrilik yönü yukarı

dış büküm
konveks



B) iç büküm

eğrilik yönü aşağı

konkav

$$f''(x) < 0$$

} olduğu aralık = $(-\infty, 0)$

dış büküm

eğrilik yönü yukarı

konveks

$$f''(x) > 0$$

} olduğu aralık = $(0, \infty)$

Optimizasyon problemleri

1) $x+3y=18$ ise $x \cdot y$ en fazla kaç olabilir?

$$x = 18 - 3y$$

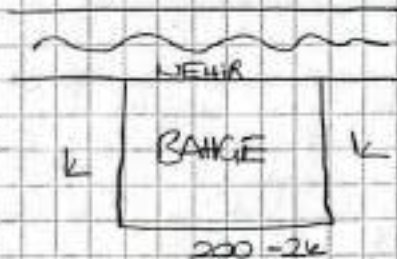
$$(18-3y) \cdot y = -3y^2 + 18y \xrightarrow{\text{Türev}} -6y + 18 \xrightarrow{+3} 3$$
$$\begin{array}{r} 3 \\ 3 \overline{) 18} \\ \underline{9} \\ 9 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

$$x = 9$$

$$y = 3$$

$x \cdot y$ en fazla 27

2)



Elinde 200 metre tel olan 1 kişi, nehir kenarına tel çekmekleştiren, en büyük alanı oluşturacak şekilde dikdörtgen bir bahçe yapmak istiyor. Bu bahçenin en fazla kaç m^2 alanı buluruz.

$$k \cdot (200 - 2k) = 200k - 2k^2$$

↓ Türevini al.

$$200 - 4k$$

$$k = 50$$

$$50 \cdot 200 = 5000 m^2$$

3) 400 cm² lik karton ile enbüyük bir köşeli prizma yapılmak isteniyor. Bu prizmanın hacminin en çok olması için bu köşeli prizmanın boyutları ne olmalıdır?



$$x^2 + 4xy = 400$$

$$x^2 - 400 = -4xy$$

$$y = \frac{x^2 - 400}{-4x} = \frac{400 - x^2}{4x}$$

$$x^2 \cdot \left(\frac{400 - x^2}{4x} \right) = \frac{400x^2 - x^4}{4x} = \frac{400x - x^3}{4}$$

$$y = \frac{400}{3} - \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{-20}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-200}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{-20}$$

$$= \frac{20}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{-20}$$

$$y = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

Türev

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (400x - x^3)$$

$$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (400 - 3x^2)$$

$$\frac{1}{4} \cdot (400 - 3x^2) = 0$$

$$400 = 3x^2$$

$$\frac{400}{3} = x^2$$

$$x = \frac{-20}{\sqrt{3}}$$

$$\text{veya } x = \frac{20}{\sqrt{3}}$$

4) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ fonksiyonu üzerindeki noktalardan koordinatları toplamı en küçük olan noktayı bulunuz.

$(x, x^2 - 5x + 4) \rightarrow$ herhangi bir koordinat

$(x^2 - 5x + 4) \rightarrow$ herhangi bir koordinat toplamı

↓ Tercim al

$$2x - 5$$

$$\rightarrow x = 2$$

$$\text{NOKTA: } (2, -2)$$



Asimptot

1. Çeşit Dişey asimptot

2. Çeşit Yatay asimptot

3. Çeşit Eğik asimptot
eğri asimptot

1) Dişey Asimptot

Enimsizlikten kaynaklı oluşan asimptotlar.

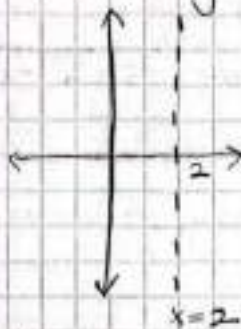
$$f(x) = 2x - 5 \rightarrow \text{Dişey asimptotu yoktur.}$$

$$f(x) = \frac{3x+4}{2} \rightarrow \text{Dişey asimptotu yoktur.}$$

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \rightarrow \text{Dişey asimptotu yoktur.}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-2}$$

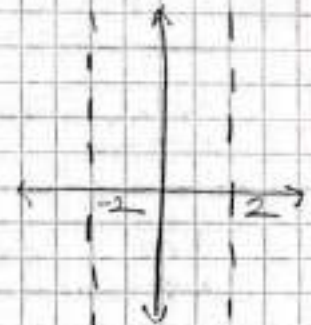
$x=2$ değeri fonksiyonu tanımsız yapıyor.



grafik asla dikey asimptotu kesemez.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

$x=2$
 $x=-2$ } paydağı 0 yapar.
Dikey asimptotlardır



$$f(x) = \ln(x-3)$$

$\hookrightarrow$ için sıfır yapan değer dikey asimptottur.

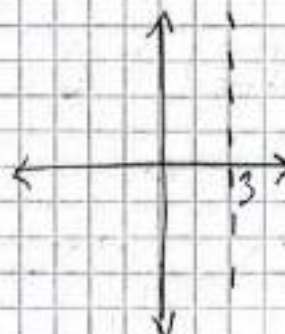
$\log_a x$ için;

$a > 0$ ve $a \neq 1$

taban > 0 ve taban $\neq 1$

$x > 0$

$\log > 0$



2) yatay asimptot

$y =$ (fonksiyonun $+\infty$ ve $-\infty$ a gidekenki limit değeri)

$$y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

limit değeri $+\infty$ veya $-\infty$ olursa yatay asimptot yoktur.

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

limit değeri sayı çıkarsa yatay asimptot vardır.

eğer limit değerlerinden birisi sonlu değeri sayı çıkarsa limiti sayı çıkan tarafta yatay asimptot vardır.

$f(x) = 2x - 3$ yatay asimptotu nedir?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 3) = -\infty$$

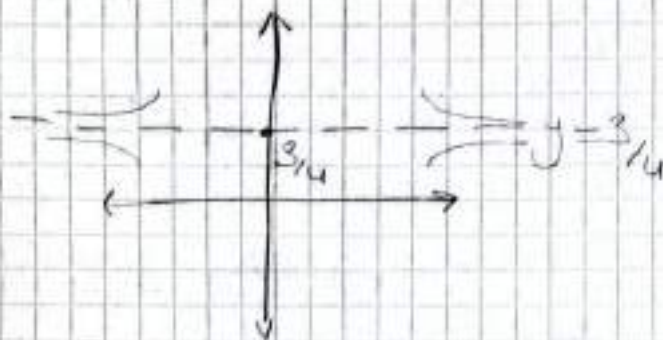
} yatay asimptot yoktur

$f(x) = \frac{3x-2}{4x+5}$ yatay asimptotu nedir?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{4x+5} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x-2}{4x+5} \right) = \frac{3}{4}$$

} yatay asimptot
 $y = \frac{3}{4}$



$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} \text{ yatay asimptotu nedir?}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2+1} \right) \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

↓ L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+1}{x^2+1} \right) \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

↓ L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

yatay asimptot
 $y=0$
doğrusudur.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x-1} \text{ yatay asimptotu nedir?}$$

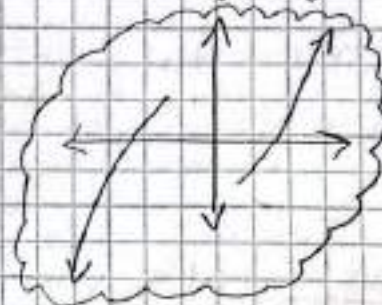
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{2x-1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

↓ L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

yatay asimptot
yoktur.



$f(x) = \frac{x-3}{2x+5}$ asimptotlarını bulunuz.

① dikey asimptot (tanımsızlıktan kaynaklı asimptot)

$$2x+5=0$$

$$x = -\frac{5}{2} \text{ dikey asimptottur.}$$

② yatay asimptot

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{2x+5} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

↓ L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \text{ yatay asimptottur.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-3}{2x+5} = \frac{1}{2}$$

③ eğik ve eğri asimptot

yatay asimptot olmayan durumda karşımıza gelir.

$y = \dots$ biçiminde yazılır

Eğik asimptotun 2 çeşidi vardır.

1. çeşit: $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ payın derecesi paydanın derecesinden
1 fazla ise

2. çeşit: $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ kök ve içinde ikinci
derece fonksiyon varsa

egri asimptot

Payın derecesi paydadın derecesinden 2 veya daha fazla

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

egik asimptot 1. cesit (Payın derecesi paydadın derecesinden 1 fazla)

$$f(x) = \frac{x^2-x+1}{x-2}$$

Pay | Payda
Bölüm

$$y = \text{Bölüm}$$

egik asimptot

$$\begin{array}{r|l} x^2-x+1 & x-2 \\ \hline x^2-2x & x+1 \\ \hline x+1 & \\ -x-2 & \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$y = x+1 \text{ egik asimptot}$$

egik asimptot 2. cesit

$$f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c} \rightarrow y = \pm \sqrt{a} \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-6x+1}$$

$$y = \pm 1 \cdot (x-3) \rightarrow y = x-3$$

$$\rightarrow y = 3-x$$

egri asimptotlar (Payın derecesi paydadın 2 veya daha fazla büyük olması)

$$f(x) = \frac{x^3+1}{x-2}$$

Pay | Payda
Bölüm

$$y = \text{Bölüm}$$

egri asimptot

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x-2 \\ \hline x^3-2x^2 & x^2+2x+4 \\ \hline 2x^2+1 & \\ 2x^2-4x & \\ \hline 4x+1 & \end{array}$$

$$y = x^2+2x+4$$

Türev Kullanarak Fonksiyon Grafiği Çizme

1. Adım $\rightarrow$ Tanım Kümesi Bulunmalıdır.
2. Adım $\rightarrow$ Fonksiyonun eksenleri keşttiği noktalar bulunmalıdır.
3. Adım $\rightarrow$ Asimptotlar bulunmalıdır. (Eğer varsa)
Düsey
Yatay
Eğik veya Eğri

4. Adım $\rightarrow$ Düsey asimptot değerinin sağdan ve soldan limitleri hesaplanır.

5. Adım $\rightarrow$ 1. Türevi alıp sıfıra eşitleme
Artan - azalan aralık
varsalar max ve min noktaları bulunabilir.

6. Adım $\rightarrow$ 2. Türevi alıp sıfıra eşitle.

konkav

iki büküm

eğriliğin yönü aşağı

$$f''(x) < 0$$

konveks

diş büküm

eğriliğin yönü yukarı

$$f''(x) > 0$$

7. Adım $\rightarrow$ fonksiyonun grafiği çizilir.

ilk olarak asimptot

sonra max-min ve büküm noktaları

sonra eksenleri keşttiği noktalar

6) ikinci terev alma

$$f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)(2x)(4x)}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{4(x^2+1)((x^2+1) - (4x^2))}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ \hline f'' & - & + & - \\ \hline & \cap & \cup & \cap \end{array}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

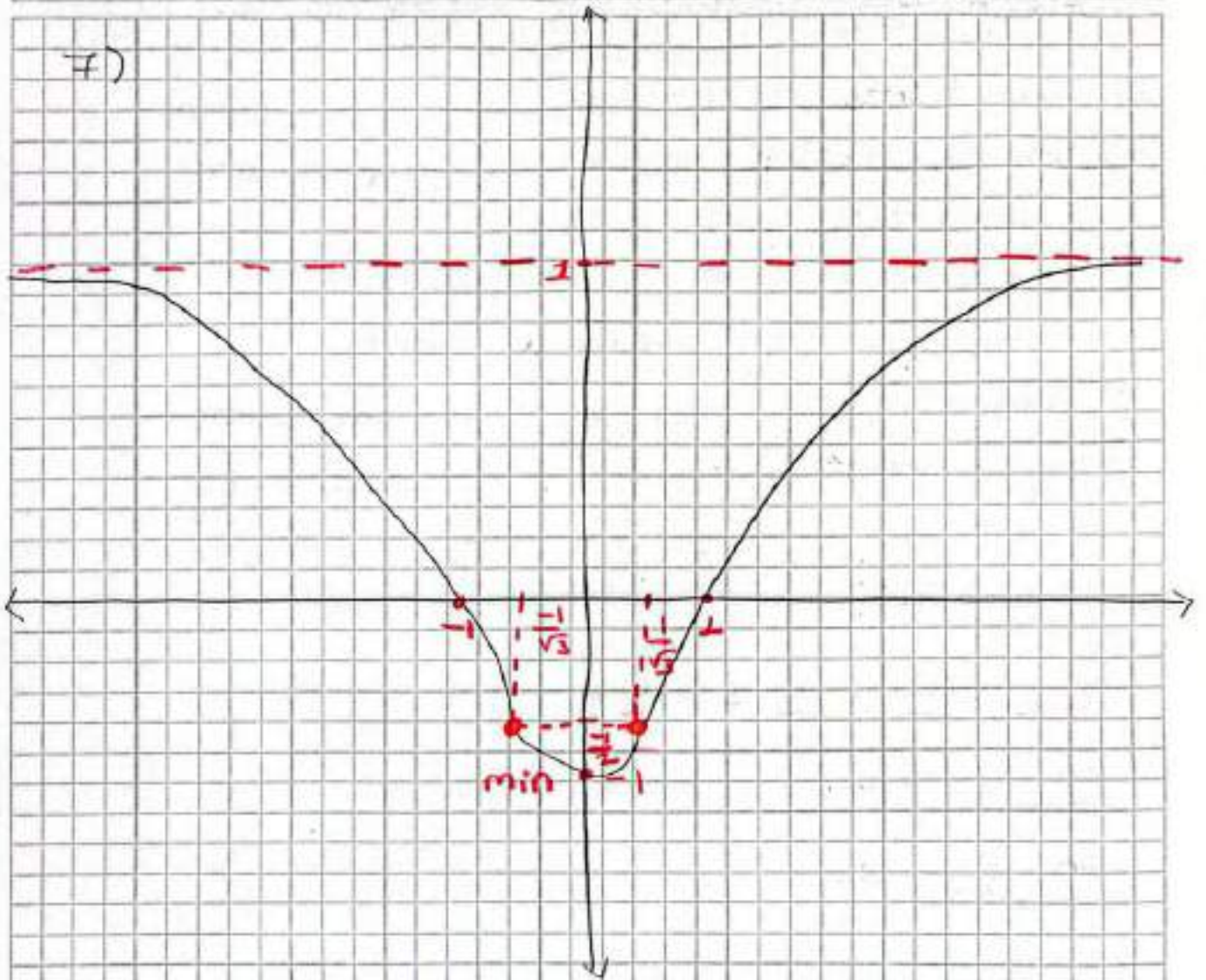
$f''(x) < 0$ ise konkav
iç bükme
eğriliğin yönü aşağı

$f''(x) > 0$ ise konveks
dış bükme
eğriliğin yönü yukarı

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right) \text{ konkav}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ konveks}$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right) \text{ ve } \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right) \text{ büküm noktaları}$$



1. olarak asimptotlar yerleştirilir

2. olarak eksenleri kestiği noktalar yerleştirilir

$$(0, -1)$$

$$(-1, 0)$$

$$(1, 0)$$

3. olarak maksimum / minimum yerleştirilir

$$\min : (0, -1)$$

4. olarak büküm noktaları yerleştirilir

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{2}\right)$$

sonrasında artan azalan bakıp çizime başlanır
konveks ve konkavlık ile ayrıztılır

$f(x) = \frac{2x}{x-1}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

1) Tanım kümesi = $\mathbb{R} - \{1\}$

2) eksenleri kestiği noktalar

$$x=0 \text{ için } y=0$$

$$y=0 \text{ için } x=0$$

eksenleri $(0,0)$ noktasında keser.

3) Asimptotlar

Düsey asimptot

$$\hookrightarrow x=1$$

Yatay asimptot

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ belirsizliği}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

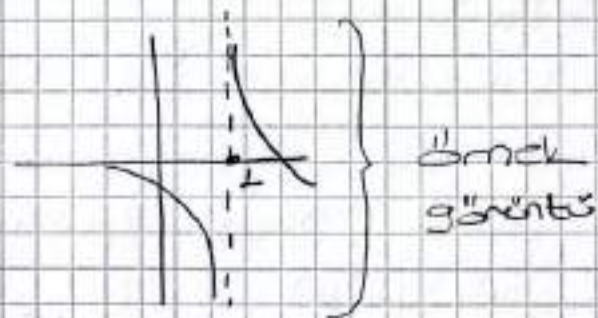
$$\boxed{y=2}$$

4) Düsey asimptot değerine sağdan ve soldan yaklaşma

$$x=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$$

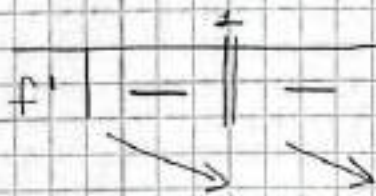


5) 1. türevi alıp sıfıra eşitleme
 artan - azalan aralık bulma
 varsa max-min noktası bulma

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - 1 \cdot 2x}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} = 0$$

max ve min nokta yok

Türevi sıfır yapan x
yok



$(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ azalan

6) 2. türevi alıp sıfıra eşitleme

konkav konveks aralıklar bulunur.
 iç büküm dış büküm
 $f''(x) < 0$ $f''(x) > 0$

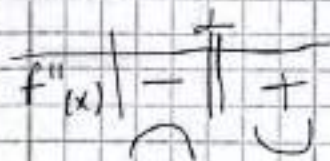
büküm noktaları bulunur.

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-1)^2 - 2 \cdot (x-1) \cdot 1 \cdot (-2)}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{4(x-1)}{(x-1)^4}$$

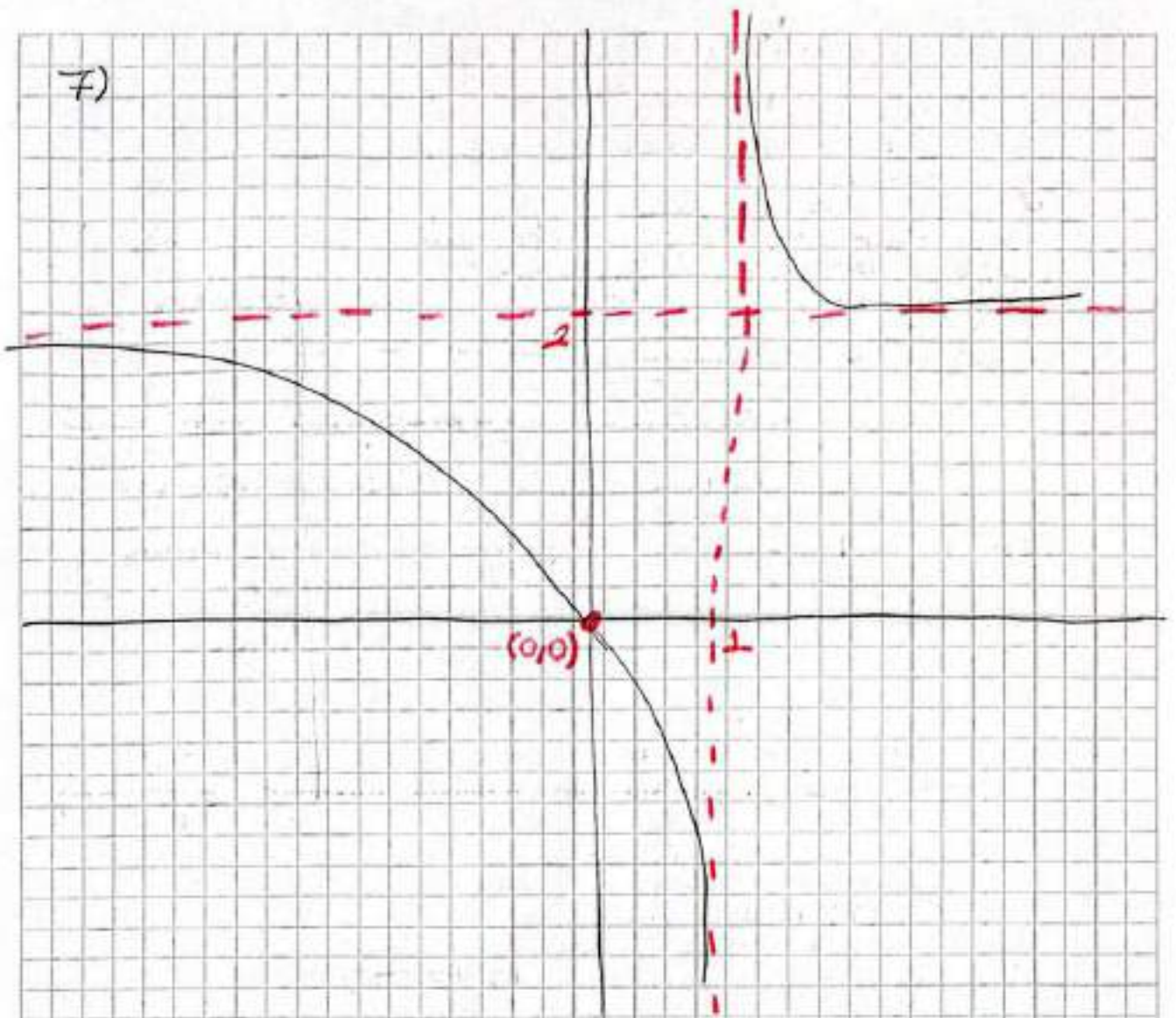
$$f''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

2. türevi 0 yapan x yok
 büküm noktası yok



$(-\infty, 1)$ aşağı bakıyor konkav
 $(1, \infty)$ yukarı bakıyor konveks

7)



① asimptotlar

② eksenleri kestiği noktalar

③ max min
bölüm noktaları

④ artan azalan
dişey asimptotun sağdan soldan limitleri
konveks konkav olduğu aralık

Trigonometrik Özdeşlikler, Trigonometrinin Türevi ve İntegrali

Özdeşlikler

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
- $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
- $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
- $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}$
- $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}$
- $\tan \frac{x}{2} = \sin$